



VII Competencia Iberoamericana
Interuniversitaria de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

Segundo día

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

26 de septiembre de 2015

Problema 4. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y α un número real tales que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha.$$

Muestra que para cualquier $r > 0$, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x - y = r$ y $f(x) = f(y)$.

Problema 5. Hay n personas sentadas en una mesa circular que tiene los puestos numerados del 1 al n en el sentido horario. Sea k un entero fijo con $2 \leq k \leq n$. Las personas pueden cambiar de puestos. Hay dos tipos de movimientos permitidos:

1. Cada persona se mueve al puesto vecino en el sentido horario.
2. Solamente intercambian puestos las personas que se encuentran en los puestos 1 y k .

Determina, en términos de n y k , el número de posibles configuraciones de personas en la mesa que se pueden alcanzar, usando alguna sucesión de movimientos permitidos.

Problema 6. Demuestra que existe un real $C > 1$ que satisface la siguiente propiedad: si $n > 1$ y $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ son enteros positivos tales que $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ están en progresión aritmética, entonces $a_0 > C^n$.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.