



VII Competencia Iberoamericana
Interuniversitaria de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

Segundo día

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

26 de setembro de 2015

Problema 4. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e α um número real tais que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha.$$

Mostre que para qualquer $r > 0$, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x - y = r$ e $f(x) = f(y)$.

Problema 5. Há n pessoas sentadas em uma mesa circular que tem os lugares numerados de 1 a n no sentido horário. Seja k um inteiro fixo com $2 \leq k \leq n$. As pessoas podem trocar de lugar. Há dois tipos de movimentos permitidos:

1. Cada pessoa se move para o lugar vizinho no sentido horário.
2. Somente trocam de lugar as pessoas que se encontram nos lugares 1 e k .

Determine, em função de n e k , o número de possíveis configurações de pessoas na mesa que podem ser obtidas, usando alguma sequência de movimentos permitidos.

Problema 6. Prove que existe um real $C > 1$ que satisfaz a seguinte propriedade: se $n > 1$ e $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ são inteiros positivos tais que $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ estão em progressão aritmética, então $a_0 > C^n$.

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.