VII Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

Primer día

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

25 de septiembre de 2015

Problema 1. Encuentra el número real a tal que la integral definida

$$\int_a^{a+8} e^{-x}e^{-x^2}dx$$

alcanza su valor máximo.

propuesto por *Sasha Fomin, UAN/Russia*

Problema 2. Halla todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la identidad

$$P(x^3-2)=P(x)^3-2\ ,$$

para todo número real x.

propuesto por *José J. Ramón Marí, IME*

Problema 3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Sea $k\geq 1$ un entero. Muestra que para cualesquiera enteros no nulos $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j_1, j_2, \ldots, j_k$ y cualesquiera enteros i_0, i_k, se cumple

$$A^{i_0}B^{j_1}A^{i_1}B^{j_2}\cdots A^{i_{k-1}}B^{j_k}A^{i_k}\neq I.$$

Nota: I denota la matriz identidad $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

propuesto por *Carlos Gustavo Tamm (Gugú), IMPA*

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.

VII Competencia Iberoamericana
Interuniversitaria de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

Segundo día

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

26 de septiembre de 2015

Problema 4. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y α un número real tales que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha.$$

Muestra que para cualquier $r > 0$, existen x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x = r$ y $f(x) = f(y)$.

propuesto por *José Anonio Gómez Ortega, UNAM*

Problema 5. Hay n personas sentadas en una mesa circular que tiene los puestos numerados del 1 al n en el sentido horario. Sea k un entero fijo con $2 \leq k \leq n$. Las personas pueden cambiar de puestos. Hay dos tipos de movimientos permitidos:

1. Cada persona se mueve al puesto vecino en el sentido horario.
2. Solamente intercambian puestos las personas que se encuentran en los puestos 1 y k.

Determina, en términos de n y k, el número de posibles configuraciones de personas en la mesa que se pueden alcanzar, usando alguna sucesión de movimientos permitidos.

propuesto por *Carlos Gustavo Tamm (Gugú), IMPA*

Problema 6. Demuestra que existe un real $C > 1$ que satisface la siguiente propiedad: si $n > 1$ y $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ son enteros positivos tales que $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ están en progresión aritmética, entonces $a_0 > C^n$.

propuesto por *Géza Kós, ELTE, Budapest, Hungary*

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.

VII Competencia Iberoamericana
Interuniversitaria de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM, México 2015

Primer día, Soluciones

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

25 de septiembre de 2015

Problema 1. Encuentra el número real a tal que la integral definida

$$\int_{a}^{a+8} e^{-x}e^{-x^2}dx$$

alcanza su valor máximo.

propuesto por *Sasha Fomin, UAN/Russia*

Solución. Es fácil ver que la función $g(x) = -x - x^2$ es simétrica con respecto al punto $x = -0,5$. Esta función crece hasta $x = -0,5$ y decrece después. Como la función exponencial es creciente, todo esto también se cumple para la función $f(x) = e^{-x-x^2}$.

Así la integral toma su valor máximo donde el intervalo $[a; a+8]$ está ubicado simétrico con respecto al punto $x = -0,5$, es decir, cuando $\frac{2a+8}{2} = -0,5$, lo cual sucede para $a = -4,5$.

Problema 2. Halla todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la identidad

$$P(x^3 - 2) = P(x)^3 - 2\ ,$$

para todo número real x.

propuesto por *José J. Ramón Marí, IME*

Solución. Sea P un polinomio que cumple la hipótesis. Descartamos rápidamente a los polinomios constantes pues no cumplen la hipótesis. Denotamos $Q(x) = x^3 - 2$. Sea $\zeta \neq 1$ una raíz cúbica de la unidad distinta de 1; usando la hipótesis en z y ζx obtenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$P(\zeta x)^3 = P((\zeta x)^3 - 2) + 2 = P(x^2 - 2) + 2 = P(x)^3.$$

De esta forma, concluimos que $P(\zeta x) = \zeta^r P(x)$ para alguna $r \in \{0, 1, 2\}$. Dos casos pueden darse:

Caso 1: Si $r = 0$, entonces P se puede expresar como polinomio en x^3 y entonces

$$P(x) = P_1(x^3) = P_0(x^3 - 2) = P_0(Q(x))$$

para algún polinomio P_0. Notemos que P_0 satisface la identidad del enunciado, puesto que la ecuación $P_0(Q(y)) = Q(P_0(y))$ se satisface para cualquier valor $y = Q(x)$, y de estos hay una infinidad. Así, la aplicación de este paso nos permite obtener un polinomio P_0 que cumple la propiedad y cuyo grado es menor pues es igual a $\frac{\deg P}{3}$.

Caso 2: Si $r = 1, 2$ entonces podemos expresar $P(x) = x^r P_0(x^3)$, y de ahí $P(0) = 0$. Evaluando la identidad en $x = 0$ vemos que $P(-2) = -2$. Si definimos la sucesión recursiva $x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^3 - 2$ vemos por inducción que

$$P(x_n) = x_n \text{ para todo } n.$$

Lo anterior implica automáticamente que $P(x) = x$, puesto que la sucesión x_n es de enteros negativos distintos. De hecho, se puede probar por inducción que $x_{n+1} \leq x_n - 2$ por inducción en n. Concluimos que $P(x) - x$ se anula para infinitos valores de x, así que $P(x) \equiv x$.

Ejecutando algorítmicamente los pasos anteriores se demuestra que, si $P(Q(x)) \equiv Q(P(x))$, entonces P es constante o es de la forma

$$P(x) = (Q \circ \overset{m}{\cdots} \circ Q)(x)$$

para algún $m > 0$.

Problema 3. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $k \geq 1$ un entero. Muestra que para cualesquiera enteros no nulos $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j_1, j_2, \ldots, j_k$ y cualesquiera enteros i_0, i_k, se cumple

$$A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \cdots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k} \neq I.$$

Nota: I denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

propuesto por *Carlos Gustavo Tamm (Gugú), IMPA*

Solución. Considere las regiones $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| > |y|\}$ y $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| < |y|\}$. Sea también $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$.

Tenemos $A(x, y) = (x + 2y, y)$ y $B(x, y) = (x, 2x + y)$. Para todo entero r tenemos $A^r(x, y) = (x + 2ry, y)$ y $B^r(x, y) = (x, 2rx + y)$.

Si $(x, y) \in U$ entonces $|x| > |y|$, de donde, para todo entero no nulo r, $|2rx + y| \geq 2|x| - |y| > |x|$, y luego $B^r(x, y) = (x, 2rx + y) \in V$. Además, en ese caso, $f(B^r(x, y)) = |2rx + y| > |x| = f(x, y)$.

Por otro lado, si $(x, y) \in V$ entonces $|x| < |y|$, de donde, para todo entero no nulo r, $|x + 2ry| \geq 2|y| - |x| > |y|$, y luego $A^r(x, y) = (x + 2ry, y) \in U$. Además, en ese caso, $f(A^r(x, y)) = |x + 2ry| > |y| = f(x, y)$.

De esas dos propiedades sigue que, si $i_k \neq 0$ y $(x, y) \in V$ (por ejemplo, si $(x, y) = (0, 1)$), entonces $f(A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k}(x, y)) > f(x, y)$, y luego $A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k} \neq I$.

Por otra parte, si $i_k = 0$ y $(x, y) \in U$ (por ejemplo, si $(x, y) = (1, 0)$), entonces

$$f(A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k}(x, y)) = f(A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k}(x, y)) > f(x, y),$$

y luego

$$A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} A^{i_k} = A^{i_0} B^{j_1} A^{i_1} B^{j_2} \ldots A^{i_{k-1}} B^{j_k} \neq I.$$

Segundo día, Soluciones

Ciudad Universitaria, UNAM, México D.F.

26 de septiembre de 2015

Problema 4. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y α un número real tales que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha.$$

Muestra que para cualquier $r > 0$, existen x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x = r$ y $f(x) = f(y)$.

propuesto por *José Anonio Gómez Ortega, UNAM*

Solución. Sea $g(x) = f(x + r) - f(x)$. Esta función es continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que $g(x) \neq 0$ para todo real x. Por la continuidad, tenemos que o bien $g(x) > 0$ para todo real, o bien $g(x) < 0$ para todo real.

Si $g(x) > 0$, entonces

$$f(nr) > f((n-1)r) > \ldots > f(r) > f(0) > f(-nr)$$

para todo entero positivo n. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(nr) \geq f(r) > f(0) \geq \lim_{n\to\infty} f(-nr) = \alpha$$

lo cual es una contradicción. El caso $g(x) < 0$ se trata de manera similar. De esta forma, concluimos que $g(x)$ debe ser cero para algún valor de x. De esta forma, tomando $y = x + r$ tenemos $y - x = r$ y $f(x) = f(y)$

Problema 5. Hay n personas sentadas en una mesa circular que tiene los puestos numerados del 1 al n en el sentido horario. Sea k un entero fijo con $2 \leq k \leq n$. Las personas pueden cambiar de puestos. Hay dos tipos de movimientos permitidos:

1. Cada persona se mueve al puesto vecino en el sentido horario.
2. Solamente intercambian puestos las personas que se encuentran en los puestos 1 y k.

Determina, en términos de n y k, el número de posibles configuraciones de personas en la mesa que se pueden alcanzar, usando alguna sucesión de movimientos permitidos.

propuesto por *Carlos Gustavo Tamm (Gugú), IMPA*

Solución. Vamos a probar que el número de configuraciones posibles es

$$\operatorname{mcd}(k-1,n)\cdot(n/\operatorname{mcd}(k-1,n))!^{\operatorname{mcd}(k-1,n)}.$$

Queremos determinar el número de elementos del grupo de permutaciones de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ generado por $f(x)=x+1$ y $g(x)$ dada por $g(1)=k, g(k)=1, g(x)=x, \forall x\notin\{1,k\}$. Sea $d=\operatorname{mcd}(k-1,n)$. Note inicialmente que si, para $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $A_i:=\{j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|j\equiv i \pmod d\}$, tenemos $f(A_i)=A_{i+1}$ y $g(A_i)=A_i$ para todo i. Por lo tanto, el orden circular de los A_i nunca se altera, y todo lo que se puede hacer (a lo sumo) es permutar los A_i independientemente y después rodar todo - como cada A_i tiene $n/d=n/\operatorname{mcd}(k-1,n)$ elementos, cada A_i tiene $(n/\operatorname{mcd}(k-1,n))!$ permutaciones, que combinadas independientemente nos darían la estimación $(n/\operatorname{mcd}(k-1,n))!^{\operatorname{mcd}(k-1,n)}$, y depués de las $d=\operatorname{mcd}(k-1,n)$ rotaciones posibles obtenemos la estimación (por ahora superior) de

$$d\cdot(n/d)!^d=\operatorname{mcd}(k-1,n)\cdot(n/\operatorname{mcd}(k-1,n))!^{\operatorname{mcd}(k-1,n)}.$$

Un *cambio binario* es un par (i,j) de posiciones tal que, componiendo movimientos permitidos, es siempre posible cambiar de lugar las personas que están en las posiciones i y j, sin mover las otras (abusando de la notación denotaremos la biyección correspondiente también por (i,j)). El enunciado dice que $(1,k)$ es un cambio binario. Vamos a probar que $(x,x+k-1)$ es un cambio binario para todo $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En efecto, la composición $f^{x-1}\circ g\circ f^{1-x}$ produce el cambio binario $(x,x+k-1)$. Podemos probar ahora por inducción que, para todo $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y para todo $r\in\mathbb{N}$, $(x,x+r(k-1))$ es un cambio binario. En efecto, si $(x,x+r(k-1))$ es un cambio binario entonces, como $(x+r(k-1),x+(r+1)(k-1))$ es un cambio binario entonces $(x,x+(r+1)(k-1))=(x,x+r(k-1))\circ(x+r(k-1),x+(r+1)(k-1))\circ(x,x+r(k-1))$ también es un cambio binario.

Ahora, como la ecuación en congruencia $r(k-1)\equiv c \pmod n$ tiene solución entera (o entera positiva) r si y solo si $d=\operatorname{mcd}(k-1,n)|c$, tenemos que para todo $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y para todo $r\in\mathbb{Z}$, $(x,x+rd)$ es un cambio binario. O sea, para cualesquiera dos elementos x,y de un mismo conjunto A_i, (x,y) es un cambio binario. Vamos usar esto para probar que podemos hacer cualquier permutación de uno de los conjuntos A_i sin hacer nada en los otros. Componiendo esas permutaciones (y despues haciendo rotaciones) obenemos todas las $d\cdot(n/d)!^d$ permutaciones descritas al principio. Haremos indución en el número de elementos de A_i que se mueven. Si nadie se mueve tenemos la identidad. Si h es la permutación en cuestión y $h(x)=y\neq x$, con $x,y\in A_i$, $\tilde h:=(x,y)\circ h$ es tal que $\tilde h(x)=x$, y $\tilde h$ mueve estrictamente menos puntos que h, luego $\tilde h$ pertenece al grupo, pero entonces $h=(x,y)\circ\tilde h$ también pertenece, lo que concluye la prueba.

Problema 6.

Demuestra que existe un real $C>1$ que satisface la siguiente propiedad: si $n>1$ y $a_0<a_1<\cdots<a_n$ son enteros positivos tales que $\dfrac{1}{a_0},\dfrac{1}{a_1},\ldots,\dfrac{1}{a_n}$ están en progresión aritmética, entonces $a_0>C^n$.

propuesto por *Géza Kós, ELTE, Budapest, Hungary*

Solución. Asumamos que $a_0<a_1<\ldots<a_n$ son enteros positivos tales que $\frac{1}{a_0},\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ es una progresión aritmética. Por conveniencia llamemos $x_i=\frac{1}{a_i}$ y $\Delta=x_0-x_1=x_1-x_2=\ldots=x_{n-1}-x_n$.

Primero demostramos por inducción en k tque

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}a_\ell=\frac{k!\cdot\Delta^k}{x_0x_1\cdots x_k}\geq 1. \tag{1}$$

Para $k = 0$ es trivial. El paso inductivo se obtiene aplicando la hipótesis de inducción a las sucesiones $(a_0, \ldots, a_k)$ y $(a_1, \ldots, a_{k+1})$:

$$\sum_{\ell=0}^{k+1}(-1)^{k+1-\ell}\binom{k+1}{\ell}a_\ell = \left(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}a_\ell\right) - \left(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}a_{\ell+1}\right) =$$
$$= \frac{k!\cdot\Delta^k}{x_0x_1\cdots x_k} - \frac{k!\cdot\Delta^k}{x_1x_2\cdots x_{k+1}} = \frac{k!\cdot\Delta^k\cdot(x_0-x_{k+1})}{x_0x_1\cdots x_{k+1}} = \frac{(k+1)!\cdot\Delta^{k+1}}{x_0x_1\cdots x_{k+1}}.$$

Finalmente, notemos que el lado izquierdo es entero y por ende es > 0 si y sólo si es ≥ 1.

(Demostración alternativa de (1): aplicar el teorema del valor medio de diferencias divididas a la función $1/x$ con puntos base $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.)

Ahora demostramos que

$$a_m \geq a_0 + 2^m - 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq m \leq n. \tag{2}$$

Consideremos

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}a_\ell\right).$$

El primer término (cuando $k = 0$) es a_0. Apliquemos (1): a los otros términos

$$\Sigma \geq a_0 + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\cdot 1 = a_0 + 2^m - 1. \tag{3}$$

Por otro lado, intercambiando las sumas,

$$\Sigma = \sum_{\ell=0}^{m}a_\ell\left(\sum_{k=\ell}^{m}(-1)^{k-\ell}\binom{m}{k}\binom{k}{\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{m}a_\ell\binom{m}{\ell}\left(\sum_{k=\ell}^{m}(-1)^{k-\ell}\binom{m-\ell}{k-\ell}\right).$$

Para $\ell < m$ la última suma es $(1-1)^{m-\ell} = 0$ por el teorema del binomio. Para $\ell = m$ esta suma es 1. Por ende, $\Sigma = a_m$ y combinando con (3) se termina la demostración de (2).

Para demostrar la afirmación del problema tomamos $m = n - 1$ en (2) y obtenemos $a_{n-1} \geq a_0 + 2^{n-1} - 1$. Por

$$x_{n-1} > x_{n-1} - x_n = \frac{x_0 - x_{n-1}}{n-1}$$

obtenemos $nx_{n-1} > x_0$, es decir, $na_0 > a_{n-1}$. Entonces

$$na_0 \geq a_{n-1} + 1 \geq a_0 + 2^{n-1}$$
$$a_0 \geq \frac{2^{n-1}}{n-1}.$$

Esto demuestra la afirmación con $C = 2 - \varepsilon$.

Nota. La sucesión $a_i = \dfrac{\operatorname{lcm}(1,2,\ldots,n+1)}{n+1-i}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ cumple trivialmente las condiciones. Además es equivalente al teorema de los números primos que $\log\operatorname{lcm}(1,2,\ldots,n) \sim n$. Esto demuestra que la afimación es falsa para $C > e$.